

单位球面中具有常平均曲率超曲面的拼挤定理*

王芬¹, 吴雪玲²

- (1. 湖北第二师范学院数学与经济学院, 湖北 武汉 430205;
2. 华中师范大学数学与统计学学院, 湖北 武汉 430079)

摘要: 研究单位球面中具有常平均曲率的超曲面。分别在假设或不假设第二基本形式的长度的平方为常数的情形下, 证明了两个重要的拼挤定理。这些结论是 Cheng (1996 年) 和 Xu 等 (2011 年) 相应结果的推广。

关键词: 常平均曲率; Clifford 环面; 陈省身猜想; 第二基本形式

中图分类号: O186 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 03-0071-07

The pinched theorems of hypersurfaces with constant mean curvature in unit spheres

WANG Fen¹, WU Xueling²

- (1. School of Mathematics and Economics, Hubei University of Education, Wuhan 430205, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: The constant mean curvature hypersurfaces in unit sphere S^{n+1} are considered. Under the hypothesis that the second fundamental form is constant or not, two important pinched theorems, which generalized corresponding results of Cheng (1996) and Xu et al (2011), are obtained.

Key words: constant mean curvature; Clifford torus; Chern's conjecture; the second fundamental form

单位球面中的具有常平均曲率的超曲面是子流形几何中的重要研究对象, 1968 年著名数学家陈省身就提出了下面的著名猜想:

令 S 是具有常数量曲率的 $n+1$ 维单位球面上的 n 维闭极小超曲面的第二基本形式的长度的平方, 那么 S 的所有可能取值构成的集合是离散的。

下面, 我们先介绍一下该猜想目前的研究状况。

$n=3$: 经过 Peng 等^[1], Chang^[2] 等的努力, 最终被 Chang^[2] 完全解决。具体来讲, 我们有

定理 1 S^4 中的一个具有常数量曲率的闭极小浸入超曲面是四维球面中的一个赤道, 或 Clifford 极小超曲面, 或者 Cartan 极小超曲面。特别地, S 只可能是 0, 3 或 6。

去掉“闭”这个条件, 我们有下面未解决的

问题:

Bryant 猜想 S^4 内的具有常数量曲率的极小浸入超曲面是等参的。

$n=4$: Lusala 等^[3] 证明了 S^5 内的具有非负常数量曲率的闭 Willmore 极小超曲面 M^4 一定是等参的。

$n \geq 5$: 未解决。

尽管经过近半个世纪, 这一伟大的猜想至今仍未被完全解决。但是众多数学家对这一猜想进行了研究, 得到一些阶段性成果。早在 1968 年, 在不假设 S 为常数的情况下, Simons^[4] 证明了 $\int_{M^n} S(S-n) \geq 0$, 从而得到: 如果 $0 \leq S \leq n$, 那么 $S \equiv 0$ 或者 $S \equiv n$ 。而且后一种情况已经被 Chern-do Carmo-Kobayash 和 Lawson 进行了独立地研究, 得到 M^n —

* 收稿日期: 2016-12-16

基金项目: 国家自然科学基金 (10901067)

作者简介: 王芬 (1980 年生), 女; 研究方向: 应用数学; E-mail: 55421810@qq.com

定是 Clifford 极小超曲面。按照 Cartan 的例子, S 的下一个值有可能是 $2n$ 。在文 [1] 中, Peng 等研究了 S 的下一个值, 并且证明了如果 $S > n$, S 为常数, 那么 $S > n + \frac{1}{12n}$ 。成庆明等^[5-7] 将 $S > n + \frac{1}{12n}$

改进为 $S > n + \frac{n}{3}$ 。利用 Cheng-Yang 的方法和更好的估计, Suh 等^[8] 将 Cheng-Yang 的结果改进到 $S > n + \frac{3n}{7}$ 。因此大家猜测:

开问题 设 M^n 是单位球面 S^{n+1} 上的一个 n 维闭极小超曲面, 并且 S 为常数。如果 $S > n$, 那么 $S > 2n$?

如果考虑更一般的常平均曲率超曲面, Almeida 等^[9] 和 Chang^[10] 证明了 S^4 中的具有常平均曲率和常数量曲率的闭超曲面 M^3 是等参的。Almeida 等^[11] 证明了: 令 H, K 和 R 分别表示 M^3 的平均曲率, 高斯曲率和数量曲率, 如果这三个函数中的两个是常数, 那么 M^3 是等参超曲面或者 $H = K \equiv 0$ 。如果我们不假定 M^n 具有常数量曲率, Peng 等^[12] ($n \leq 5$), Wei 等^[13] ($n \leq 7$), Zhang^[14] ($n \leq 8$), Ding 等^[15] ($n \geq 3$) 证明了如下拼挤定理:

定理 2 设 M 是浸入在 S^{n+1} 内的一个极小闭超曲面, ($n \geq 3$), 并且 S 是 M 的第二基本形式的平方形式。那么存在 $\delta(n) = n/23 > 0$, 使得如果 $n \leq S(x) < n + \delta(n)$, 那么 $S(x) \equiv n$, 因此 M 是一个 Clifford 环面。

该结果被 Xu 等^[16] 推广到了常平均曲率的情形。关于陈省身猜想更多详细的介绍, 请参考文献 [17]。

1 主要结果

本文主要受 Xu 等^[16] 的启发, 在一定条件下, 得到了拼挤常数的显示表达。具体来讲, 我们证明了如下拼挤定理:

定理 3 设 M^n 是 S^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, S 是 M^n 第二基本形式的长度的平方, $f_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, 其中 λ_i ($1 \leq i \leq n$) 是 M^n 的主曲率。如果

$$Sf_4 - f_3^2 - S^2 \leq$$

$$\frac{1}{n}S(n-S)^2 + nH^2f_4 - 2HSf_3 + S(S-n)$$

则存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$, 使得当

$$|H| \leq \varepsilon(n), S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$$

时, 其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 +$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} + \left[2n^2 - \frac{n^3}{2(n-1)}\right]H^2 -$$

$$n\sqrt{4n^2H^4 + 4\left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2}\right)H^2} -$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}$$

有 $S \equiv S_0$, 且 M^n 等距于 Clifford 超曲面。确切地讲, 当 $H = 0$ 时, M^n 与 Clifford 超曲面 $S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times S^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ 是等距的; 当 $H \neq 0$ 时, M^n 与 Clifford 超曲面 $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \times S^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$ 是等距的。

推论 1 设 M^n 是 S^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, M^n 有两个不同主曲率, 其中一个为 $n-1$ 重, 则存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$, 使得当 $|H| \leq \varepsilon(n)$, $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ 时, 其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 +$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} + \left[2n^2 - \frac{n^3}{2(n-1)}\right]H^2 -$$

$$n\sqrt{4n^2H^4 + 4\left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2}\right)H^2} -$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}$$

有 $S \equiv S_0$, M^n 与 Clifford 超曲面是等距的。确切地讲, 当 $H = 0$ 时, M^n 与 Clifford 超曲面 $S^1\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \times S^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ 是等距的; 当 $H \neq 0$ 时, M^n 与 Clifford 超曲面 $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \times S^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$ 是等距的。

若 S 为常数, 则有下列的拼挤定理:

定理 4 M^n 是 S^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, M^n 第二基本形式长度的平方 S 是常数。如果

$$Sf_4 - f_3^2 - S^2 \leq \frac{1}{n}S(n - S)^2 +$$

$$nH^2f_4 - 2HSf_3 + S(S - n)$$

则存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$, 使得当

$$|H| \leq \varepsilon(n), S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$$

时, 其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n - 1)}H^2 +$$

$$\frac{n(n - 2)}{2(n - 1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n - 1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{n^2(n + 4)}{n^2 + 4n + 6} +$$

$$\left[\frac{9n^2(n + 2)^4}{2(n^2 + 4n + 6)^2} - \frac{n^3}{2(n - 1)} \right]H^2 -$$

$$\frac{3n(n + 2)^2}{2(n^2 + 4n + 6)}.$$

$$\sqrt{\frac{9n^2(n + 2)^4}{(n^2 + 4n + 6)^2}H^4 + 4\left(n + \frac{n^2(n + 4)}{n^2 + 4n + 6}\right)H^2} -$$

$$\frac{n(n - 2)}{2(n - 1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n - 1)H^2}$$

有 $S \equiv S_0$, M 是一个 Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right) \times$

$$\mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right).$$

推论 2 M^n 是 \mathbb{S}^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, M^n 第二基本形式长度的平方 S 为常数. 如果 M^n 有两个不同主曲率, 其中一个为 $n - 1$ 重, 则存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$, 当 $|H| \leq \varepsilon(n)$, $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ 时, 其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n - 1)}H^2 +$$

$$\frac{n(n - 2)}{2(n - 1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n - 1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{n^2(n + 4)}{n^2 + 4n + 6} +$$

$$\left[\frac{9n^2(n + 2)^4}{2(n^2 + 4n + 6)^2} - \frac{n^3}{2(n - 1)} \right]H^2 -$$

$$\frac{3n(n + 2)^2}{2(n^2 + 4n + 6)}.$$

$$\sqrt{\frac{9n^2(n + 2)^4}{(n^2 + 4n + 6)^2}H^4 + 4\left(n + \frac{n^2(n + 4)}{n^2 + 4n + 6}\right)H^2} -$$

$$\frac{n(n - 2)}{2(n - 1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n - 1)H^2}$$

有 $S \equiv S_0$, M 是一个 Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right) \times$

$$\mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}\right).$$

注 1 当 $H = 0$ 时, 定理 3 和定理 4 就分别为文 [18] 和文 [19] 中的主要结果.

2 预备知识

在本节中, 我们将回顾一些关于 \mathbb{S}^{n+1} 上的常平均曲率闭超曲面的基本而又重要的等式, 这些在文 [20] 中有更详细的介绍. 假定 M^n 是 \mathbb{S}^{n+1} 上的一个具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, 那么可以选取一个正交向量场 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ 使得 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 切于 M^n . 令 h_{ij} 和 H 分别表示 M 的第二基本形式和平均曲率, 则

$$H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}, S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$$

我们再定义

$$f_3 = \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{jk}h_{ki}, f_4 = \sum_{i,j,k,l} h_{ij}h_{jk}h_{kl}h_{li}$$

对于 M 上任意固定的一点 P , 取正交标架, 使得在点 P 有 $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. 其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 P 点处的主曲率. 那么, 在这一点 P 处, 有

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i, S = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3, f_4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4$$

令 h_{ijk} 和 h_{ijkl} 分别表示第二基本形式的第一、第二协变导数的分量, 定义 A, B 如下

$$A = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i^2 \text{ 和 } B = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i \lambda_j$$

通过计算, 可以得到如下相关等式:

$$\frac{1}{2} \Delta S = S(n - S) - n^2H^2 + nHf_3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \Delta \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = (2n + 3 - S) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - 3(A - 2B) -$$

$$\frac{3}{2} |\nabla S|^2 + 3nH \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i + \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \quad (2)$$

$$\Delta f_3 = 3(n - S)f_3 + 3nHf_4 - 3nHS + 6 \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i \quad (3)$$

$$\int_M A - 2B = \int_M Sf_4 - f_3^2 - S^2 + nHf_3 - \frac{|\nabla S|^2}{4} \quad (4)$$

引理 1^[21] 设 M^n 是 \mathbb{S}^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的 n 维闭超曲面, 则有

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq \frac{3}{2} (Sf_4 - f_3^2 - S^2 - S(S - n) - n^2H^2 + 2nHf_3) +$$

$$\frac{3}{2(n+4)}[(n-S)^2S + n^2H^2f_4 - n^3H^2 + 2n(n-S)Hf_3]$$

3 定理证明

定理 3 的证明 由式 (1) - 式 (3), 通过直接计算, 可得

$$\int_M \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \int_M -S(n-S) + n^2H^2 - nHf_3 \quad (5)$$

$$- \frac{1}{2} \int_M |\nabla S|^2 =$$

$$\int_M S^2(n-S) - n^2H^2S + nHf_3S + S \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \quad (6)$$

$$\int_M -3 \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i =$$

$$\frac{3}{2} \int_M (n-S)f_3 + nHf_4 - nHS \quad (7)$$

$$\int_M \sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = \int_M (S-2n-3) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 +$$

$$3(A-2B) + \frac{3}{2} |\nabla S|^2 - 3nH \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i \quad (8)$$

结合引理 1 及式 (8), 可得

$$\int_M (S-2n-3) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + 3(A-2B) +$$

$$\frac{3}{2} |\nabla S|^2 - 3nH \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i \geq$$

$$\int_M \frac{3}{2} (Sf_4 - f_3^2 - S^2 -$$

$$S(S-n) - n^2H^2 + 2nHf_3) +$$

$$\int_M \frac{3}{2(n+4)} [(n-S)^2S + n^2H^2f_4 -$$

$$n^3H^2 + 2n(n-S)Hf_3] \quad (9)$$

又 $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = |\nabla h|^2$, 结合式 (4) - 式 (7), 可得

$$\int_M -\left(\frac{5}{4}S - \frac{n}{4} + \frac{3}{2}\right) |\nabla h|^2 + \frac{3}{2}(A-2B) -$$

$$\left(3 - \frac{3}{n+4}\right) nH \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i +$$

$$\int_M \frac{9n+30}{4(n+4)} [-S^2(n-S) + n^2H^2S -$$

$$nHSf_3 - n|\nabla h|^2] \geq 0$$

即

$$\int_M -\left(\frac{5}{4}S - \frac{n}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9n+30}{4(n+4)}n\right) |\nabla h|^2 -$$

$$\left(3n - \frac{3n}{n+4}\right) H \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i +$$

$$\int_M \frac{9n+30}{4(n+4)} S[-S(n-S) + n^2H^2 - nHf_3] +$$

$$\int_M \frac{3}{2}(A-2B) \geq 0 \quad (10)$$

已知 $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = |\nabla h|^2$, 结合式 (4) 及式 (6), 可得

$$\int_M (A-2B) = \int_M (Sf_4 - f_3^2 - S^2 + nHf_3) +$$

$$\frac{1}{2} \int_M [S^2(n-S) - n^2H^2S + nHSf_3 + S|\nabla h|^2] \quad (11)$$

因为

$$Sf_4 - f_3^2 - S^2 \leq$$

$$\frac{1}{n} S(n-S)^2 + nH^2f_4 - 2HSf_3 + S(S-n) \quad (12)$$

结合等式 (11) 及不等式 (12), 得

$$\int_M (A-2B) \leq \int_M \frac{1}{n} S(n-S)^2 + \frac{1}{2} S^2(n-S) +$$

$$\frac{1}{2} S|\nabla h|^2 + S(S-n) + \int_M nH^2f_4 - 2HSf_3 +$$

$$nHf_3 - \frac{1}{2} \int_M n^2H^2S - nHSf_3 \quad (13)$$

由式 (7), 通过计算, 可得

$$\int_M nH^2f_4 - 2HSf_3 + nHf_3 =$$

$$\int_M \frac{1}{n} S[n^2H^2 + S(S-n) - nHf_3] - \frac{1}{n} S^2(S-n) -$$

$$2H \int_M \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i - \frac{1}{2} \int_M n^2H^2S - nHSf_3 =$$

$$- \frac{1}{2} \int_M S[n^2H^2 + S(S-n) - nHf_3] - S^2(S-n)$$

代入不等式 (13) 中, 可得

$$\int_M (A-2B) \leq \int_M \frac{1}{n} S(n-S)^2 + \frac{1}{2} S^2(n-S) +$$

$$\frac{1}{2} S|\nabla h|^2 + S(S-n) - 2H \int_M \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i +$$

$$\int_M \frac{S}{n} [n^2H^2 + S(S-n) - nHf_3] - \frac{1}{n} S^2(S-n) -$$

$$\frac{1}{2} \int_M S[n^2H^2 + S(S-n) - nHf_3] - S^2(S-n) \quad (14)$$

结合式 (10) 及式 (14), 化简可得

$$\int_M \left(-2n - \frac{6}{n+4} - \frac{S}{2}\right) |\nabla h|^2 -$$

$$\left(3n + \frac{12}{n+4}\right) H \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i +$$

$$\int_M \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{n(n+4)}\right) S(n^2H^2 + S(S-n) - nHf_3) \geq 0$$

因为 $\left|\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \lambda_i\right| \leq \sqrt{S} |\nabla h|^2$, 则有

$$\int_M \left(-2n - \frac{6}{n+4} - \frac{S}{2}\right) |\nabla h|^2 +$$

$$\int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} |\nabla h|^2 + \int_M \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{n(n+4)} \right) \cdot S(n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) \geq 0 \quad (15)$$

又知

$$\int_M \left(-2n - \frac{6}{n+4} - \frac{S}{2} \right) |\nabla h|^2 = \int_M -\frac{1}{2}(S-n) |\nabla h|^2 - \int_M \left(\frac{5}{2}n + \frac{6}{n+4} \right) (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3)$$

结合式 (15)，整理可得

$$\int_M -\frac{1}{2}(S-n) |\nabla h|^2 + \int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} |\nabla h|^2 - \int_M \left(\frac{5}{2}n + \frac{6}{n+4} - \frac{3}{2}S - \frac{6}{n(n+4)}S \right) \cdot (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) \geq 0 \quad (16)$$

其中

$$\frac{5}{2}n + \frac{6}{n+4} - \frac{3}{2}S - \frac{6}{n(n+4)}S = \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}S - \frac{6(S-n)}{n(n+4)}$$

式 (16) 即

$$\int_M -\frac{1}{2}(S-n) |\nabla h|^2 + \int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} |\nabla h|^2 - \int_M \left(\frac{5}{2}n - \frac{3}{2}S - \frac{6(S-n)}{n(n+4)} \right) \cdot (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) \geq 0 \quad (17)$$

因 $S \geq S_0$ ，由计算不难得到 $-S(n-S) + n^2 H^2 - nHf_3 \geq 0$ 。如果 $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ ， $\delta(n, H)$ 是仅依赖于常数 n 和 H 的正数，则

$$\int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} |\nabla h|^2 \leq$$

$$\int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} |\nabla h|^2$$

这里 $\left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)}$ 是常数，结合 (5) 式有

$$\int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} |\nabla h|^2 = \int_M \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} \cdot (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3)$$

从而，可以得到

$$-\int_M \left(\frac{5}{2}n - \frac{3}{2}S - \frac{6(S-n)}{n(n+4)} - \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} \right) \cdot (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) - \int_M \frac{1}{2}(S-n) |\nabla h|^2 \geq 0 \quad (18)$$

即

$$\int_M \left(\frac{5}{2}n - \frac{3}{2}S - \frac{6(S-n)}{n(n+4)} - \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} \right) \cdot (n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) + \int_M \frac{1}{2}(S-n) |\nabla h|^2 \leq 0 \quad (19)$$

因 $S \geq S_0$ ， $|\nabla h|^2 \geq 0$ ，且 $n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3 \geq 0$ ，若上述不等式 (19) 左侧同时也满足大于等于 0，则需满足

$$\frac{5}{2}n - \frac{3}{2}S - \frac{6(S-n)}{n(n+4)} - \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)} \geq 0$$

解不等式，可得

$$S \leq n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} - 2n |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)}$$

因 $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ ，则

$$S_0 + \delta(n, H) = n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} - 2n |H| \sqrt{S_0 + \delta(n, H)}$$

令 $t = \sqrt{S_0 + \delta(n, H)}$ ，整理可得

$$t^2 + 2n |H| t - \left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} \right) = 0$$

因 $t > 0$ ，则

$$t = -n |H| + \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 H^2 + 4 \left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} \right)}$$

所以

$$t^2 = S_0 + \delta(n, H) = n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} + 2n^2 H^2 - n \sqrt{4n^2 H^2 + 4 \left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} \right)} H^2$$

综上所述：存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$ ，当 $|H| \leq \varepsilon(n)$ ， $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ 时，其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n-1)} H^2 +$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} + \left[2n^2 - \frac{n^3}{2(n-1)} \right] H^2 -$$

$$n \sqrt{4n^2 H^4 + 4 \left(n + \frac{2n^2(n+4)}{3(n+2)^2} \right) H^2} -$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1)H^2}$$

有 $-S(n-S) + n^2 H^2 - nHf_3 = 0$, 这也就意味着 $S = S_0$, M 是一个 Clifford 超曲面。

推论 1 的证明 当 M^n 有两个不同主曲率时, 满足

$$Sf_4 - f_3^2 - S^2 =$$

$$\frac{1}{n} S(n-S)^2 + nH^2 f_4 - 2HSf_3 + S(S-n)$$

再由定理 3, 可得推论 1 成立。

定理 4 的证明 已知 S 为常数, 则

$$\int_M \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{n(n+4)} \right) S(n^2 H^2 + S(S-n) - nHf_3) =$$

$$\int_M \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{n(n+4)} \right) S |\nabla h|^2$$

将等式代入式 (15) 中, 可得

$$\int_M \left[-2n - \frac{6}{n+4} - \frac{S}{2} + \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{n(n+4)} \right) S \right] |\nabla h|^2 \geq 0$$

化简可得

$$\int_M \left[2n + \frac{6}{n+4} - \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} - \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{6}{n(n+4)} \right) S \right] |\nabla h|^2 \leq 0 \quad (20)$$

因 $|\nabla h|^2 \geq 0$, 若不等式 (20) 左侧同时也满足大于等于 0, 即

$$0 \leq \int_M \left[2n + \frac{6}{n+4} - \left(3n + \frac{12}{n+4} \right) |H| \sqrt{S} - \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{6}{n(n+4)} \right) S \right] |\nabla h|^2 \leq 0$$

则需满足

$$- \frac{n^2 + 4n + 6}{n(n+4)} S - \frac{3(n+2)^2}{(n+4)} |H| \sqrt{S} +$$

$$\frac{2(n^2 + 4n + 3)}{(n+4)} \geq 0$$

令 $t = \sqrt{S}$, 整理可得

$$(n^2 + 4n + 6)t^2 + 3n(n+2)^2 |H| t -$$

$$2n(n^2 + 4n + 3) \leq 0$$

记 $\Delta = 9n^2(n+2)^4 H^2 + 8n(n^2 + 4n + 6)(n^2 + 4n + 3)$, 易知 $t > 0$, 则有

$$0 < t \leq \frac{-3n(n+2)^2 H + \sqrt{\Delta}}{2(n^2 + 4n + 6)}$$

所以

$$0 < t^2 = S \leq \left[\frac{-3n(n+2)^2 H + \sqrt{\Delta}}{2(n^2 + 4n + 6)} \right]^2$$

记

$$S_0 + \delta(n, H) = \left[\frac{-3n(n+2)^2 H + \sqrt{\Delta}}{2(n^2 + 4n + 6)} \right]^2$$

则

$$S_0 + \delta(n, H) = n + \frac{n^2(n+4)}{n^2 + 4n + 6} +$$

$$\frac{9n^2(n+2)^4}{2(n^2 + 4n + 6)^2} H^2 - \frac{3n(n+2)^2}{2(n^2 + 4n + 6)} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{9n^2(n+2)^4}{(n^2 + 4n + 6)^2} H^4 + 4 \left(n + \frac{n^2(n+4)}{n^2 + 4n + 6} \right) H^2}$$

当满足条件时, 可得 $|\nabla h| = 0$, 从而有方程

$$-S(n-S) + n^2 H^2 - nHf_3 = 0$$

综上所述, 存在仅依赖于 n 的充分小的正数 $\varepsilon(n)$ 和仅依赖于常数 n 和 H 的正数 $\delta(n, H)$, 当 $|H| \leq \varepsilon(n)$, $S_0 \leq S \leq S_0 + \delta(n, H)$ 时, 其中

$$S_0 = n + \frac{n^3}{2(n-1)} H^2 +$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1)H^2},$$

$$\delta(n, H) = \frac{n^2(n+4)}{n^2 + 4n + 6} +$$

$$\left[\frac{9n^2(n+2)^4}{2(n^2 + 4n + 6)^2} - \frac{n^3}{2(n-1)} \right] H^2 -$$

$$\frac{3n(n+2)^2}{2(n^2 + 4n + 6)} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{9n^2(n+2)^4}{(n^2 + 4n + 6)^2} H^4 + 4 \left(n + \frac{n^2(n+4)}{n^2 + 4n + 6} \right) H^2} -$$

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1)H^2}$$

有 $-S(n-S) + n^2 H^2 - nHf_3 = 0$, 意味着 $S = S_0$, M 一个 Clifford 超曲面。

推论 2 的证明 当 M^n 有两个不同主曲率时, 满足

$$Sf_4 - f_3^2 - S^2 =$$

$$\frac{1}{n} S(n-S)^2 + nH^2 f_4 - 2HSf_3 + S(S-n)$$

因此由定理 4 知推论 2 成立。

参考文献:

[1] PENG C K, TERNG C L. Seminar on minimal submanifolds [M]. Princeton: Princeton Univ Press, 1983: 177

- 198.
- [2] CHANG S P. On minimal hypersurfaces with constant scalar curvatures in \mathbb{S}^4 [J]. *J Diff Geom*, 1993, 37(3): 523 - 534.
- [3] LUSALA T, SCHERFNER M, DE SOUSA Jr L A M. Closed minimal Willmore hypersurfaces of $\mathbb{S}^5(1)$ with constant scalar curvature [J]. *Asian J Math*, 2005, 9(1): 65 - 78.
- [4] SIMONS J. Minimal varieties in Riemannian manifolds [J]. *Ann Math*, 1968, 88(1): 62 - 105.
- [5] YANG H C, CHENG Q M. A note on the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere [J]. *Chinese Science Bull*, 1991, 36(1): 1 - 6.
- [6] YANG H C, CHENG Q M. An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere [J]. *Manuscripta Math*, 1994, 84(1): 89 - 100.
- [7] YANG H C, CHENG Q M. Chern's conjecture on minimal hypersurfaces [J]. *Math Z*, 1998, 227(3): 377 - 390.
- [8] SUH Y J, YANG H Y. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in a unit sphere [J]. *Commun Contemp Math*, 2007, 9(2): 183 - 200.
- [9] de ALMEIDA SEBASTIAO C, BRITO FABIANO G B. Closed 3 - dimensional hypersurfaces with constant with constant mean curvature and constant scalar curvature [J]. *Duke Math J*, 1990, 61(1): 195 - 206.
- [10] CHANG S P. A closed hypersurface with constant scalar curvature and constant mean curvature in \mathbb{S}^4 is isoparametric [J]. *Comm Anal Geom*, 1993, 1(1): 71 - 100.
- [11] de ALMEIDA SEBASTIAO C, BRITO FABIANO G B, de SOUSA Jr L A M. Closed hypersurfaces of \mathbb{S}^4 with two constant curvature functions [J]. *Results in Math*, 2007, 50(1): 17 - 26.
- [12] PENG C K, TERNG C L. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres [J]. *Math Ann*, 1983, 266(1): 105 - 113.
- [13] WEI S M, XU H W. Scalar curvature of minimal hypersurfaces in a sphere [J]. *Math Res Lett*, 2007, 14(3): 423 - 432.
- [14] ZHANG Q. The pinching constant of minimal hypersurfaces in the unit spheres [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2010, 138(5): 1833 - 1841.
- [15] DING Q, XIN Y L. On Chern's problem for rigidity of minimal hypersurfaces in the spheres [J]. *Adv Math*, 2011, 227(1): 131 - 145.
- [16] XU H W, XU Z Y. A new characterization of the Clifford torus via scalar curvature pinching [J]. *J Funct Anal*, 2014, 267(10): 3931 - 3962.
- [17] SCHERFNER M, WEISS S. Towards a proof of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres [C] // Proc 33 South German Diff Geom Colloq, 2008: 1 - 33.
- [18] CHENG Q M. The rigidity of Clifford torus $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ [J]. *Comment Math Helv*, 1996, 71(1): 60 - 69.
- [19] XU Y W, XU Z Y. On rigidity of Clifford torus in a unit sphere [J]. *Appl Math J Chinese Univ (Ser B)*, 2011, 26(1): 121 - 126.
- [20] CHENG Q M, HE Y J, LI H Z. Scalar curvature of hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere [J]. *Glasg Math J*, 2009, 51(2): 413 - 423.
- [21] DENG Q T, GU H L, SU Y H. Constant mean curvature hypersurfaces in spheres [J]. *Glasg Math J*, 2012, 54(1): 77 - 86.